Μάθημα 2ο « Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ »

$\mathcal{L}(V,W)$ είναι το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων από το $V \to W$, όπου V, W είναι K-διανυσματικοί χώροι.

Έχουμε $(\mathcal{L}(V,W), K, +, \cdot)$ K-διανυσματικός χώρος και τα στοιχεία του είναι γραμμικές απεικονίσεις.

$0 : V \to W$, $0(\vec{v}) = \vec{0}_W$ είναι γραμμική απεικόνιση.

α βάση του V
β βάση του W

$$[0]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ ο μηδενικός $m \times n$ πίνακας.

$$[f+g]_\alpha^\beta = [f]_\alpha^\beta + [g]_\alpha^\beta$$
$$[\lambda f]_\alpha^\beta = \lambda [f]_\alpha^\beta$$

Έστω V, W δύο K-διανυσματικοί χώροι με $\dim V = n$ και $\dim W = m$

Προσπαθώ να κάνω μια απεικόνιση $T : \mathcal{L}(V,W) \to K$.
Έχουμε $\alpha = \{\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \dots, \vec{\alpha_n}\}$ βάση του V
$\beta = \{\vec{\beta_1}, \vec{\beta_2}, \dots, \vec{\beta_m}\}$ βάση του W.

$$T(f) = [f]_\alpha^\beta$$

Θεώρημα: Η T είναι ισομορφισμός.

απόδειξη: Αρκεί νδο $T(f+g) = T(f) + T(g)$ και $T(\lambda \cdot f) = \lambda T(f)$, δηλαδή η T είναι γραμμική

- $T(f+g) = [f+g]_a^b = [f]_a^b + [g]_a^b = T(f)+T(g)$
- $T(\lambda f) = [\lambda f]_a^b = \lambda [f]_a^b = \lambda T(f)$. Άρα είναι γραμμική

Στη συνέχεια βρίσκουμε τον πυρήνα της T.

$$\ker T = \{f \in \mathcal{L}(V,W) \mid T(f) = O_{m\times n}\} =$$

$$= \{f \in \mathcal{L}(V,W) \mid [f]_a^b = O_{m\times n}\} =$$

(Έχουμε ότι $f(\vec{a_1}) = \vec{O_W}$, $f(\vec{a_2}) = \vec{O_W} \dots f(\vec{a_n}) = \vec{O_W}$)

$$= \{f \in \mathcal{L}(V,W) \mid f = 0\} = \{0\}.$$

Αφού ο πυρήνας έχει ένα μόνο διάνυσμα και μάλιστα το μηδενικό προκύπτει ότι η T είναι 1-1, άρα η T είναι μονομορφισμός

Τέλος, αρκεί νδο η T είναι επιμορφισμός. Ψάχνουμε μία απεικόνιση $f: V \to W$ τέτοια ώστε $[f]_a^b = A$, όπου $A \in K^{m\times n}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad [f]_a^b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow f(\vec{a_1}) \quad \downarrow f(\vec{a_2}) \quad \downarrow f(\vec{a_m}).$$

Έχουμε, επίσης, ισχύει:

$$f(\lambda_1\vec{a_1} + \dots + \lambda_n\vec{a_n}) = \lambda_1(a_{11}\vec{b_1} + \dots + a_{1m}\vec{b_m}) + \dots + \lambda_n(a_{1n}\vec{b_1} + \dots + a_{mn}\vec{b_m})$$

Πρέπει νδο η f είναι γραμμική για να είναι η T επι $\longrightarrow$

Για να δείξω ότι η f είναι γραμμική, αρκεί νδο «σέβεται» το άθροισμα και το γινόμενο: ⊛

(i) $f(\vec{\gamma}+\vec{\delta}) = f(\mu_1\vec{a_1}+\dots+\mu_n\vec{a_n} \quad \kappa_1\vec{a_1}+\dots+\kappa_n\vec{a_n}) =$

$= f((\mu_1+\kappa_1)\vec{a_1}+\dots+(\mu_n+\kappa_n)\vec{a_n}) =$

$= (\mu_1+\kappa_1)(a_{11}\vec{b_1}+\dots+a_{1m}\vec{b_m})+\dots+(\mu_n+\kappa_n)(a_{1n}\vec{b_1}+\dots+a_{mn}\vec{b_m}) =$

$= \underline{\mu_1(a_{11}\vec{b_1}+\dots+a_{1m}\vec{b_m})+\dots+\mu_n(a_{1n}\vec{b_1}+\dots+a_{mn}\vec{b_m})} +$

$+ \underline{\kappa_1(a_{11}\vec{b_1}+\dots+a_{1m}\vec{b_m})+\dots+\kappa_n(a_{1n}\vec{b_1}+\dots+a_{mn}\vec{b_m})} =$

$= f(\mu_1\vec{a_1}+\dots+\mu_n\vec{a_n}) + f(\kappa_1\vec{a_1}+\dots+\kappa_n\vec{a_n}) =$

$= f(\vec{\gamma})+f(\vec{\delta})$. Που σημαίνει πως «σέβεται το άθροισμα».

⊛ $\vec{\gamma} = \mu_1\vec{a_1}+\dots+\mu_n\vec{a_n}$ και $\vec{\delta} = \kappa_1\vec{a_1}+\dots+\kappa_n\vec{a_n}$.

(ii) $f(\lambda\vec{\gamma}) = f(\lambda(\mu_1\vec{a_1}+\dots+\mu_n\vec{a_n})) = f(\lambda\mu_1\vec{a_1}+\dots+\lambda\mu_n\vec{a_n}) =$

$= \lambda\cdot\mu_1\cdot(a_{11}\vec{b_1}+\dots+a_{1m}\vec{b_m})+\dots+\lambda\mu_n(a_{1n}\vec{b_1}+\dots+a_{mn}\vec{b_n}) =$

$= \lambda[\mu_1(a_{11}\vec{b_1}+\dots+a_{1m}\vec{b_m})+\dots+\mu_n(a_{1n}\vec{b_1}+\dots+a_{mn}\vec{b_n})] =$

$= \lambda f(\mu_1\vec{a_1}+\dots+\mu_n\vec{a_n}) = \lambda\cdot f(\vec{\gamma})$. Που σημαίνει πως «σέβεται το γινόμενο».

Άρα η f είναι γραμμική: $A = [f]_a^b = T(f)$. και επομένως η $\underline{T \text{ είναι επί}}$

Πόρισμα: $T: \mathcal{L}(V,W) \to K^{m\times n}$, $T(f) = [f]_a^b$ η T είναι ισομορφισμός.

Ποιά είναι η διάσταση του χώρου $\mathcal{L}(V,W)$;

Δείξαμε ότι οι χώροι $\mathcal{L}(V,W)$ και $K^{m\times n}$ είναι ισόμορφοι, άρα έχουν ίδια διάσταση και:

$$\dim(\mathcal{L}(V,W)) = \dim(K^{m\times n}) = m\times n.$$

Σύνθεση.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & U \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

, όπου V, U, W είναι K-διανυσματικοί χώροι.

$\alpha=\{\vec{\alpha}_1, \ldots \vec{\alpha}_n\}$, $\beta=\{\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_m\}$, $\gamma=\{\vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_s\}$.

$$\underbrace{[g\circ f]_\alpha^\gamma}_{s\times n} = \underbrace{[g]_\beta^\gamma}_{s\times m} \cdot \underbrace{[f]_\alpha^\beta}_{m\times n}.$$

Έστω μια γραμμική απεικόνιση T.

$[T(\vec{u})]_\gamma = [T]_\varepsilon^\gamma \cdot [\vec{u}]_\varepsilon$ → οι συντεταγμένες του $\vec{u}$ στη βάση ε

$[T(\vec{u})]_\gamma$ → οι συντεταγμένες του $\vec{u}$ στη βάση γ.

$\vec{u}\in V$. $[f(\vec{u})]_\beta = [f]_\alpha^\beta \cdot [\vec{u}]_\alpha$

$$\left.\begin{array}{l} [g(f(\vec{u}))]_\gamma = [g]_\beta^\gamma \cdot [f(\vec{u})]_\beta \\ [g(f(\vec{u}))]_\gamma = [(g\circ f)(\vec{u})]_\gamma = [g\circ f]_\alpha^\gamma \cdot [\vec{u}]_\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow [g\circ f]_\alpha^\gamma [\vec{u}]_\alpha = [g]_\beta^\gamma \cdot [f(\vec{u})]_\beta$$

→

Έχουμε:

είναι πίνακας στήλη

$$[g\circ f]_a^\gamma [\vec{u}]_a = [g]_\beta^\gamma [f(\vec{u})]_\beta = [g]_\beta^\gamma \cdot [f]_a^\beta \cdot [\vec{u}]_a.$$

Επομένως: $[g\circ f]_a^\gamma \cdot [\vec{u}]_a = [g]_\beta^\gamma [f]_a^\beta [\vec{u}]_a$.

Διαλέγω το $[\vec{u}]_a$ να είναι το πρώτο διάνυσμα της βάσης α.

$$[\vec{u}]_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Αυτό το κάνω γιατί:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{s1} \end{pmatrix}$$

Μπορεί ο πίνακας $[\vec{u}]_a$ να πάρει οποιαδήποτε τιμή, γι' αυτό βάζω $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ μετά παίρνω $[\vec{u}]_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ μετά $[\vec{u}]_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ και το αποτέλεσμα έπεται.. $[g\circ f]_a^\gamma$ και $[g]_\beta^\gamma \cdot [f]_a^\beta$ έχουν την ίδια i-στήλη.

Άρα $\boxed{[g\circ f]_a^\gamma = [g]_\beta^\gamma \cdot [f]_a^\beta}$

Έχουμε $V \xrightarrow{T} W$, $[T]_a^{\beta}$

$a = \{\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}\}$ βάση του V

$\beta = \{\vec{\beta_1}, \dots, \vec{\beta_m}\}$ βάση του W.

Και $V \xrightarrow{T} W$, $[T]_{\gamma}^{\delta}$

$\gamma = \{\vec{\gamma_1}, \dots, \vec{\gamma_n}\}$ βάση του V

$\delta = \{\vec{\delta_1}, \dots, \vec{\delta_n}\}$ βάση του W.

Τι σχέση έχουν οι δύο πίνακες μεταξύ τους ???

Για να βρώ τι σχέση έχουν οι δύο πίνακες:
Θα γράψω μία από τις δύο απεικονίσεις σαν σύνθεση συναρτήσεων.

$$\begin{tikzcd}
V_a \arrow[r, "T"] & W_\beta \arrow[d, "I_W"] \\
V_\gamma \arrow[u, "I_V"] \arrow[r, "T"] & W_\delta
\end{tikzcd}$$

$\vec{u} \rightarrow T(\vec{u})$.

$T = I_W \circ T \circ I_V$

$\vec{u} = T(\vec{u})$.

$\vec{u} = (I_W \circ T \circ I_V)(\vec{u}) = (I_W \circ T)(I_V(\vec{u})) =$

$= (I_W \circ T)(\vec{u}) = I_W(T(\vec{u})) = T(\vec{u})$.

Προκύπτει ότι οι απεικονίσεις είναι ίδιες:

$T = (I_W \circ T) \circ I_V$ και άρα $[T]_{\gamma}^{\delta} = [(I_W \circ T) \circ I_V]_{\gamma}^{\delta}$

$[T]_{\gamma}^{\delta} = [(I_W \circ T) \circ I_V]_{\gamma}^{\delta} = [(I_W \circ T)]_a^{\delta} \cdot [I_V]_{\gamma}^{a} =$

$= [I_W]_{\beta}^{\delta} \cdot [T]_a^{\beta} \cdot [I_V]_{\gamma}^{a}$. Επομένως προκύπτει:

$$[T]_{\gamma}^{\delta} = [I_W]_{\beta}^{\delta} \cdot [T]_a^{\beta} \cdot [I_V]_{\gamma}^{a}.$$ SOS τύπος !!!

$$\boxed{[T]_{\gamma}^{\delta} = [I_W]_{\beta}^{\delta} \cdot [T]_{\alpha}^{\beta} \cdot [I_V]_{\gamma}^{\alpha}}$$

πίνακες αλλαγής βάσης

$V \xrightarrow{I} V$ (ταυτοτική απεικόνιση)

$A=\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n\}$, $B=\{\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_n\}$, $A=\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n\}$.

$$V \xrightarrow{I} V \xrightarrow{I} V$$

$I = I\circ I$.

$n\times n$

$$[I]_A^A = [I\circ I]_A^A = [I]_B^A \cdot [I]_A^B.$$

Ο πίνακας αλλαγής βάσης από την βάση Β στην Α, αν πολλαπλασιαστεί με τον πίνακα αλλαγής βάσης από την Α στην Β προκύπτει ο πίνακας αλλαγής βάσης από την βάση Α στην Α.

$$[I]_A^A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} I(\vec{a}_1) & I(\vec{a}_2) & I(\vec{a}_3) & I(\vec{a}_n) \end{array} \end{array}$$

Είναι ο ταυτοτικός πίνακας

<u>Παρατήρηση</u>: Ο πίνακας αλλαγής βάσης $[I]_A^B$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $[I]_B^A$, δηλαδή:

$$\left([I]_A^B\right)^{-1} = [I]_B^A.$$

Πρόταση: Έστω $\Gamma, \Delta \in K^{m\times n}$ πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης $T: V \to W$, τότε υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες P και Q τέτοιοι ώστε $\Gamma = P\Delta Q$

* * * * * * *

Ορισμός: Έστω $\Gamma, \Delta \in K^{m\times n}$. Ο πίνακας Γ λέγεται ισοδύναμος με τον Δ αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P \in K^{m\times n}$ και $Q \in K^{m\times n}$ με $\Gamma = P\Delta Q$

Παρατήρηση: Πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης είναι ισοδύναμοι μεταξύ τους.

* * * * * * *

ΑΣΚΗΣΗ: Έστω $T: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ με

$$T(\alpha x^2 + bx + \gamma) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b+\gamma & 2\gamma \end{pmatrix}$$

(i) Βρείτε τον πίνακα της T από την βάση $A = \{x^2, x, 1\}$ (διατεταγμένη), στην βάση $B = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

(ii) Βρείτε τον πίνακα N της T από την βάση $\Gamma = \{x^2+1, x+1, 1\}$ στη βάση $\Delta = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$.

(iii) Βρες αντιστρέψιμους πίνακες P, Q τέτοιους ώστε $M = PNQ$.

ΛΥΣΗ (i) Βρίσκω τον πίνακα $M = [T]_A^B$ που είναι 4×3.

Το $T(x^2)$ μου λέει την πρώτη στήλη., το γράφω στη βάση B:

$$1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

Ακολουθώ την ίδια διαδικασία για το $T(x)$ και $T(1)$ και προκύπτει:

$$M = [T]_A^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow 4\times3 \text{ πίνακας}$$

(ii) $N = [T]_\Gamma^\Delta$.

Την πρώτη στήλη μου την δίνει το $T(x^2+1)$ που είναι.

$$T(x^2+1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα $$[T]_\Gamma^\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 & \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 \\ \lambda_3+\lambda_4 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

Λύνω το σύστημα. και η πρώτη στήλη είναι $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$T(x+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

η δεύτερη στήλη είναι $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Την τελευταία στήλη μου την λέει το $T(1)$ που είναι.

$$T(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Και άρα έχουμε τον πίνακα:

$$N = [T]_\Gamma^\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow 4\times3 \text{ πίνακας}$$

$\longrightarrow \longrightarrow$

(iii) $M = PNQ$.

Το M είναι : $M = [T]_A^B$.

Πάντα ο πίνακας αλλαγής βάσης είναι τετραγωνικός πίνακας

Ο P και Q είναι πίνακες αλλαγής βάσης, άρα ταυτοτικής απεικόνισης. και έχουμε:

$$[T]_A^B = [I]_\Delta^B [T]_\Gamma^\Delta \cdot [I]_A^\Gamma$$

Έχω στο μυαλό μου τα ολοκληρώματα.

$$P = [I]_\Delta^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to 4\times4 \text{ πίνακας.}$$

$I\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $\quad I\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ $\quad I\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ $\quad I\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

$$Q = [I]_A^\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to 3\times3 \text{ πίνακας.}$$

$I(1) = 1 = \underline{0}(x^2+1) + \underline{0}(x+1) + \underline{1}\cdot 1$

$I(x^2) = x^2 =$

$= \underline{1}(x^2+1) + \underline{0}(x+1) + \underline{-1}\cdot 1$.

$I(x) = x = \underline{0}(x^2+1) + \underline{1}(x+1) + \underline{-1}\cdot 1$.

$$Q^{-1} = \left([I]_A^\Gamma\right)^{-1} = [I]_\Gamma^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

την πρώτη στήλη
μου την λέει το πρώτο στοιχείο της Γ, γραμμένο στην
κανονική βάση A.